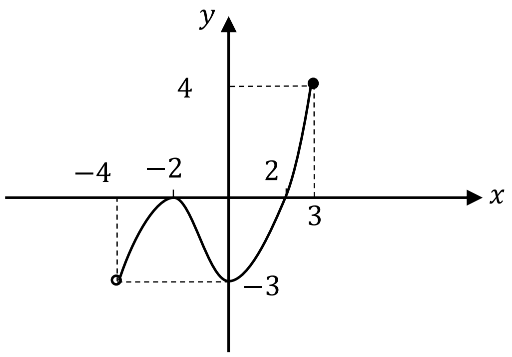
ورقة تدريبية (1) في مادة الرياضيات

الصف الثالث الثانوي العلمي (2020 - 2021)

أولاً: أجب عن الأسئلة التالية: (40 درجة لكل سؤال)



السؤال الأول: في الشكل المجاور خط بياني C لتابع f :

1) أوجد D_f , $f(D)$

$D_f =]-4\,,3]$, $f(D) = [-3\,,4]$

2) أوجد حل المعادلة $f(x) = -3$

للمعادلة $f(x) = -3$ حل وحيد هو $x = 0$

3) أوجد حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$

$f(x) \geq 0 \implies x \in [2\,,3] \cup \{-2\}$

4) دل على القيم الحدية واذكر نوعها

$f(-2) = 0$ قيمة حدية كبرى

$f(0) = -3$ قيمة حدية صغرى

$f(3) = 4$ قيمة حدية كبرى

السؤال الثاني: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق:

$$\boldsymbol{u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \quad \dots\dots\dots . + \frac{1}{2n-1}}$$

ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ \dots\dots + \frac{1}{2n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{\frac{-1}{n} + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{-2n - 1 + 2n}{2n(2n+1)}$$

$$= \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

السؤال الثالث: ليكن العدد العقدي $Z = \left(\frac{-4+4i}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3} - 3i)$ **والمطلوب:**

أثبت أن $|Z| = 8\sqrt{3}$ **و** $argZ = \frac{5\pi}{12}$ **ثم استنتج الشكل الأسي للعدد** Z.

$$Z_1 = \sqrt{3} - 3i$$
$$r = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$$
$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_1 &= \frac{1}{2}\\ \sin\theta_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\theta_1 = -\frac{\pi}{3}$$
$$Z_2 = \frac{-4+4i}{\sqrt{2}}$$
$$r_2 = 4$$
$$\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$|Z| = \left|\left(\frac{-4+4i}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3} - 3i)\right|$$
$$= \left|\frac{-4+4i}{\sqrt{2}}\right|.\left|\sqrt{3} - 3i\right| = 8\sqrt{3}$$
$$\arg Z = \arg\left(\frac{-4+4i}{\sqrt{2}}\right) + \arg(\sqrt{3} - 3i)$$
$$= \frac{3\pi}{4} + \left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{12}$$
$$Z = re^{i\theta} = 8\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

السؤال الرابع: أوجد نهاية التابع f **عند القيمة الموافقة:**

① $\boldsymbol{f(x) = \frac{1-\cos 2x}{3-\sqrt{x+9}}}$ $\quad(\mathbf{0})$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$ عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2\sin^2 x\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{\left(3-\sqrt{x+9}\right)\left(3+\sqrt{x+9}\right)}$$
$$= \frac{2\sin^2 x\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{9-x-9}$$
$$= -2\frac{\sin x}{x}\sin x\left(3+\sqrt{x+9}\right)$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2(1)(0)(6) = 0$$

علماً أن $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

② $\boldsymbol{|f(x) - 1| \le \frac{3x+\cos x}{x} - 3}$ $\quad(+\infty)$

نفرض : $g(x) = \frac{3x+\cos x}{x} - 3$

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$-1+3x \le 3x+\cos x \le 1+3x$$
$$\frac{-1+3x}{x} \le \frac{3x+\cos x}{x} \le \frac{1+3x}{x}\ ;x>0$$
$$\frac{-1+3x}{x} - 3 \le \frac{3x+\cos x}{x} - 3 \le \frac{1+3x}{x} - 3$$
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{x} - 3\right) &= 3-3 = 0\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+3x}{x} - 3\right) &= 3-3 = 0\end{aligned}\right\}$$ حسب الاحاطة ①

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \quad \xRightarrow{\text{حسب الإحاطة ②}} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

③ $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}}$ $\quad(\mathbf{0})$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$ عدم تعيين $\infty - \infty$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty(1-\infty) = -\infty$$

④ $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{(x^2-4)(1-x)}}$ $\quad\begin{pmatrix}+\infty\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{2}\end{pmatrix}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{-x^3} = -1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

⑤ $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{3-\sqrt{x+8}}}$ $\qquad$ $(\mathbf{1})$

$\lim\limits_{x\to} f(x)=?$ $\qquad \dfrac{0}{0}$ عدم تعيين

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{\left(3-\sqrt{x+8}\right)\left(3+\sqrt{x+8}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{9-x-8}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(3+\sqrt{x+8}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\frac{(x+3-4)\left(3+\sqrt{x+8}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$f(x)=-\frac{3+\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

⑥ $\boldsymbol{f(x)=\sin(x^2-1)}$ $\qquad$ $(+\infty)$

ليس لتابع الـ $\sin$ نهاية عند $+\infty$

ليس للتابع f نهاية عند $+\infty$

<u>ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:</u> (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول:

- **$c\,,b\,,a$ ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية وتحقق: $\boldsymbol{a.b.c=-10}$ و $\boldsymbol{a+b+c=6}$ احسبها**

$b=\dfrac{a+c}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2b=a+c$

$2b+b=6$

$3b=6 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{b=2}$

$a+2+c=6$

$\boxed{a+c=4}$ ①

$a\,.\,2\,.\,c=-10 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{a\,.\,c=-5}$ ②

من ① نجد: $\qquad a=4-c$

نعوض في ② : $\qquad (4-c)\,c=-5$

$4c-c^2=-5$

$c^2-4c-5=0$

$(c-5)(c+1)=0$

إما $c=5$, أو $c=-1$

$b=2 \quad \Longrightarrow \quad c=5 \quad \Longrightarrow \quad a=-1$

$b=2 \quad \Longrightarrow \quad c=-1 \quad \Longrightarrow \quad a=5$

التمرين الثاني: لتكن لدينا الأعداد العقدية $Z_1 = \sqrt{3} - i$, $Z_2 = \sqrt{3} + 3i$

1) أوجد Z_3 معاكس Z_1 ، Z_4 مرافق Z_2

$Z_3 = -Z_1 = -\sqrt{3} + i \qquad , \qquad Z_4 = \overline{Z}_2 = \sqrt{3} - 3i$

2) أثبت أن $W = \frac{Z_1 - Z_4}{Z_1 - Z_2}$ عدد حقيقي

$$W = \frac{Z_1 - Z_4}{Z_1 - Z_2} = \frac{\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} - 3i)}{\sqrt{3} - i - (\sqrt{3} + 3i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - 3i} = \frac{2i}{-4i} = \frac{-1}{2} \quad \text{حقيقي}$$

3) أثبت أن $Z = \frac{Z_2}{Z_1}$ عدد تخيلي بحت

$$Z = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} - i} \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{3 + \sqrt{3}\, i + 3\sqrt{3}\, i - 3}{3 + 1}$$

$$Z = \frac{4\sqrt{3} i}{4} = \sqrt{3}\, i \qquad \text{تخيلي بحت}$$

4) احسب $|Z^{10}|$, $\overline{Z + W}$, $|Z + W|$

$$|Z^{10}| = |Z|^{10} = (\sqrt{3})^{10} = (3)^5 = 243$$

$$\overline{Z + W} = \overline{Z} + \overline{W} = -\sqrt{3}\, i - \frac{1}{2}$$

$$|Z + W| = \left| -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\, i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

التمرين الثالث: بفرض f التابع المعرف على $R \setminus \{1\}$ وفق: $f(x) = 1 + \frac{x+1}{x-1}$

1) احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \to +\infty} f(f(x))$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = \lim_{t \to 2} f(t) = 4$$

1) عين عدد حقيقي A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$ كان $f(x) \in]1.98\,, 2.02[$

$$I =]1.98\,, 2.02[\quad , \quad \ell = 2 \quad , \quad \varepsilon = 0.02$$

$$f(x) \in I \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$$\left| 1 + \frac{x+1}{x-1} - 2 \right| < \frac{2}{100}$$

$$\left| \frac{2}{x-1} \right| < \frac{1}{50}$$

$$|x - 1| = x - 1 \qquad : \quad x \to +\infty$$

$$\frac{2}{x-1} < \frac{1}{50}$$

$$x - 1 > 100$$

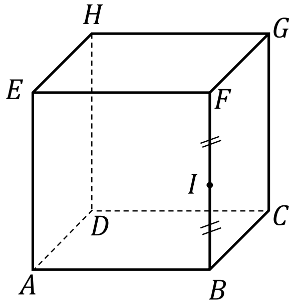
$$x > 101 \longrightarrow \boxed{A = 101}$$

2) حل المعادلة $f(x) = 1$

$$f(x) = 1$$

$$1 + \frac{x+1}{x-1} = 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 0 \longrightarrow \quad x+1=0 \implies \quad x=-1$$



التمرين الرابع: مكعب فيه I منتصف $[FB]$ والمطلوب:

1) وضّع النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{IC}$$

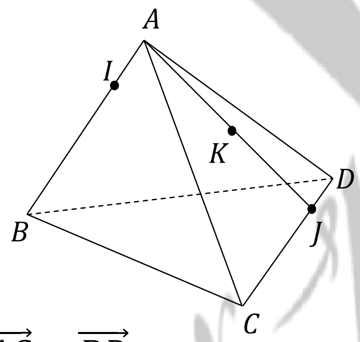
$$= \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DF}\right] + \overrightarrow{IC}$$

$= \frac{1}{2}\left[2\overrightarrow{DI}\right] + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DC} \implies$ M تنطبق على C

2) هل تكون الأشعة $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DI}$ مرتبطة خطياً أم لا؟

نلاحظ أن D تقع خارج المستوي الذي يحوي النقاط $A \;,\; I \;,\; F$

$\Longleftarrow$ الأشعة $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DI}$ غير مرتبطة خطياً



<u>ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:</u> (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCD$ رباعي وجوه فيه J نقطة تحقق $2\,\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{JC}$

I نقطة تحقق $3\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ ، K منتصف $[AJ]$

1) أثبت صحة العلاقة $2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\left(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DJ}\right)$

$$L_1 = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$= 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + 3\overrightarrow{IJ} + 2\left(2\overrightarrow{DJ}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DJ}$$

$$= 3\overrightarrow{IJ} + 4\overrightarrow{DJ} - \overrightarrow{DJ}$$

$$= 3\overrightarrow{IJ} + 3\overrightarrow{DJ}$$

$$= 3\left(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DJ}\right) = L_2$$

2) وضّع النقطة M التي تحقق $2\,\overrightarrow{BM} = 2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

$$2\,\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$$

$$2\,\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BJ}$$

$$2\,\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BK}$$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BK}$ إذاً M تنطبق على K

المسألة الثانية: بفرض $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالعلاقة $v_n = u_n - 3$

1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}(v_n) \end{aligned}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3} = q$$

$(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$$

2) عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \,.\, q^n$$

$$v_n = (-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$v_n = u_n - 3 \quad \Longrightarrow \quad u_n = v_n + 3 \quad \Longrightarrow \quad u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

3) احسب بدلالة n المجموع $S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_n$

S_n متتالية مجاميع هندسية

حدها الأول $v_0 = -1$

أساسها $q = \frac{1}{3}$

عدد الحدود$= n - 0 + 1 = n + 1$

$$S_n = (\text{الحد الأول})\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q}\right)$$

$$S_n = (-1)\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$\Longrightarrow S_n = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

4) ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

$$u_0 = 2 \ , \qquad u_1 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3} \qquad , \qquad u_2 = \frac{8}{9} + 2 = \frac{26}{9}$$

نلاحظ أن الحدود الثلاث الأولى متزايدة تماماً

① نثبت أن المتتالية متزايدة من أجل $n = 0$

$$u_1 - u_0 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} > 0$$ محققة

② نفرض أن المتتالية متزايدة من أجل n:

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

③ نثبت أن المتتالية متزايدة من أجل $n + 1$

$$u_{n+2} - u_{n+1} > 0$$

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 - \frac{1}{3}u_n - 2$$

$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}\underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{>0 \text{ فرضا}} > 0$$

محققة من أجل $n + 1$ فهي محققة من أجل n

$\Leftarrow$ المتتالية متزايدة تماماً

--- انتهت الأسئلة ---